複素領域における非線型偏微分方程式(複素領域の偏微分方程式)

田原, 秀敏

数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 42-51

複素領域における非線型偏微分方程式

上智大理工　田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)

本稿では, 複素領域で

$$\text{(E)} \qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+|\alpha|\le m \\ j<m}}\Big)$$

という形の非線型偏微分方程式を論じる. 講演では, 主として「解の一意性」に焦点を当てたが, ここではその背景にある問題意識や「解の存在」なども同時に解説したい. 記号 : $\boldsymbol{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, $\boldsymbol{N}^*=\{1,2,\ldots\}$, $t\in \boldsymbol{C}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in \boldsymbol{C}^n$, など.

1. Briot-Bouquet の方程式

複素領域での非線型常微分方程式論で, 最も簡単な特異点研究のモデルは「Briot-Bouquet の特異点」であろうと思われる. ここに Briot-Bouquet の方程式に関する基本的な結果の幾つかを復習しておく.

$u=u(t)$ を未知関数とする方程式

$$\text{(e)} \qquad t\frac{du}{dt} = f(t,u)$$

が, 次の 2 つの条件を満たすとき, (e) は Briot-Bouquet の方程式といわれる.

(a_1)　$f(t,z)$ は原点 $(t,z)=(0,0)$ の近傍で正則である,

(a_2)　$f(0,0)=0$.

このとき,

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$$

で定義される λ を (e) の特性指数という. 「 Briot-Bouquet の方程式 」という名前の由来は次の結果による.

定理 1 (Briot-Bouquet (1856)) もしも $\lambda \notin \boldsymbol{N}^*$ ならば, 方程式 (e) は原点の近傍での正則解 $u(t)$ で $u(0)=0$ を満たすものをただ一つ持つ.

例 1

$$t\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u, \quad u(t) \longrightarrow 0 \ (t \longrightarrow 0 \text{ のとき}) \tag{1.1}$$

を考えると, $\lambda = 1/2 \notin \boldsymbol{N}^*$ であり

1) $u \equiv 0$ がただ一つの正則解.

2) (1.1) は更に次の様な解を持っている.

$$u(t) = c\sqrt{t} \quad (c \in \boldsymbol{C} \text{ は任意定数})$$

例 2

$$t\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u + u^2, \quad u(t) \longrightarrow 0 \ (t \longrightarrow 0 \text{ のとき}) \tag{1.2}$$

を考えると, ここでも $\lambda = 1/2 \notin \boldsymbol{N}^*$ であり

1) $u \equiv 0$ がただ一つの正則解.

2) (1.2) は更に次の様な解を持っている.

$$u(t) = \frac{\sqrt{t}}{c - 2\sqrt{t}} \quad (c \in \boldsymbol{C} \text{ は任意定数})$$

この様に, Briot-Bouquet の方程式は, 正則解以外にも $t=0$ に特異点をもつ面白い解をいろいろ持っている. $t=0$ に特異点をもつ解（以下では これを特異解と呼ぶことにする）については次が最も基本的である.

定理 2 もしも $\lambda \notin \{1, 2 \ldots\} \cup \{a \in \boldsymbol{R} \ : \ a \leq 0\}$ ならば, Briot-Bouquet 方程式 (e) の解 $u(t)$ で 条件

$$u(t) \longrightarrow 0 \ (t \longrightarrow 0 \text{ のとき})$$

を満たすものは, すべて次で与えられる.

$$u(t) = a_{1,0}t + At^{\lambda} + \sum_{i+j\geq 2} a_{i,j}t^i(At^{\lambda})^j$$

ここで $A \in \boldsymbol{C}$ は任意定数,

$$a_{1,0}t + w + \sum_{i+j\geq 2} a_{i,j}t^i w^j$$

は 2 変数 (t,w) の収束べき級数, その係数 $a_{i,j}$ は方程式から一意的に決まるものである.

2. Briot-Bouquet 型の偏微分方程式

1990 年, Gérard-Tahara[2] は「Briot-Bouquet の常微分方程式」をモデルにして, その偏微分方程式版とでもいうべき次の偏微分方程式を導入した.

$$(\mathrm{E}_1) \qquad t\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

ここで, $t \in \boldsymbol{C}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$, $u = u(t,x)$ は未知関数,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \boldsymbol{C}^n$ とし $F(t,x,u,v)$ は $(t,x,u,v) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}^n$ を変数とする関数である.

定義 1 $F(t,x,u,v)$ が次の条件 (A_1), (A_2), (A_3) を満たすとき, 方程式 (E_1) は Briot-Bouquet 型の偏微分方程式であるという.

(A_1) $F(t,x,u,v)$ は原点 $(0,0,0,0)$ の近傍で正則;

(A_2) $x=0$ の近傍で $F(0,x,0,0) \equiv 0$;

(A_3) $x=0$ の近傍で $\dfrac{\partial F}{\partial v_i}(0,x,0,0) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$.

条件 (A_1), (A_2) は Briot-Bouquet の常微分方程式の 条件 (a_1), (a_2) に対応している. (A_3) は以下の議論で本質的に使われるものである.

このとき, (E_1) の特性指数は次で与えられる.

$$\lambda(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(0,x,0,0).$$

明らかに, これは $x=0$ の近傍での正則関数である.

第 1 節の 定理 1 (正則解に関するもの) に対応する結果は次の通りである.

定理 1 * ([2]) もしも $\lambda(0) \notin \boldsymbol{N}^*$ ならば, 方程式 (E_1) は 原点の近傍での正則解 $u(t,x)$ で $u(0,x) \equiv 0$ を満たすものをただ一つ持つ. (以下この正則解を $u_0(t,x)$ とかく)

定理 2 (特異解に関するもの) に対応する結果を述べるため, 少し定義を準備する

定義 2 $\tilde{\mathcal{O}}$ でもって, 次の条件を満たす関数 $u(t,x)$ 全体の集合を表す: 「 ある 正値連続関数 $\varepsilon(s) \in C^0(\boldsymbol{R})$ と $r > 0$ が存在して, $u(t,x)$ は $\{(t,x) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{C}^n ;\ 0 < |t| < \varepsilon(\arg t),\ |x| \le r\}$ 上での正則関数である 」. ただし, $\mathcal{R}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ は $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ の普遍被覆空間とする.

定義 3 $\tilde{\mathcal{O}}_+$ でもって, 次の条件を満たす関数 $u(t,x) \in \tilde{\mathcal{O}}$ 全体の集合を表す: 「ある $a > 0$ が存在して, 任意の $\theta > 0$ に対して

$$\max_{|x| \le r} |u(t,x)| = O(|t|^a) \quad (S_\theta \ni t \longrightarrow 0)$$

が成り立つ 」. ただし, $S_\theta = \{t \in \mathcal{R}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\}); |\arg t| < \theta\}$.

また, $\boldsymbol{C}\{x\}$ でもって原点 $x = 0 \in \boldsymbol{C}^n$ の近傍で正則な関数全体を表すとする. 次が 定理 2 (特異解に関するもの) の偏微分方程式版である.

定理 2 * ([2]) 方程式 (E_1) の $\tilde{\mathcal{O}}_+$ 解の全体を $\mathcal{S}_+$ とおく. $\lambda(0) \notin \boldsymbol{N}^*$ のもとでは, $\mathcal{S}_+$ は次で与えられる.

$$\mathcal{S}_+ = \begin{cases} \{u_0\}, & \mathrm{Re}\lambda(0) \le 0 \text{ のとき}, \\ \{u_0\} \cup \{U(\varphi);\ 0 \ne \varphi(x) \in \boldsymbol{C}\{x\}\}, & \mathrm{Re}\lambda(0) > 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

ここで, u_0 は 定理 1 * でのただ一つの正則解を表し, $U(\varphi)$ は $\varphi(x)$ に依存して決まる (E_1) の $\tilde{\mathcal{O}}_+$-解であって, 次の様な展開式をもっている.

$$U(\varphi) = \sum_{i \ge 1} u_i(x) t^i + \varphi(x) t^{\lambda(x)} + \sum_{\substack{i+2j \ge k+2 \\ j \ge 1 \\ (i,j,k) \ne (0,1,0)}} \phi_{i,j,k}(x) t^{i+j\lambda(x)} (\log t)^k.$$

上の 定理 1 * と 定理 2 * は Briot-Bouquet の常微分方程式に対する結果 (定理 1, 2) と酷似している. それが, Gérard-Tahara [2] で方程式 (E_1) を「Briot-Bouquet 型の偏微分方程式」と呼んだ理由である.

3. 高階の非線型偏微分方程式

ここでは,「Briot-Bouquet 型の偏微分方程式」の高階版とでもいうべき 次の非線型偏微分方程式を考えてみる.

$$\text{(E)} \qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+|\alpha|\le m \\ j<m}}\Big).$$

ここで, $t \in \boldsymbol{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n},$$

$u(= u(t,x))$ は未知関数である. 更に

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+|\alpha|\le m \\ j<m}}, \qquad Z_{j,\alpha} \in \boldsymbol{C}$$

とし, $F(t,x,Z)$ は (t,x,Z) を複素変数とする関数であって次の条件を満たすものとする.

(C_1) $F(t,x,Z)$ は原点 $(0,0,0)$ の近傍で正則;

(C_2) $x=0$ の近傍で $F(0,x,0) \equiv 0$;

(C_3) $|\alpha| > 0$ ならば, $x=0$ の近傍で $\dfrac{\partial F}{\partial Z_{j,\alpha}}(0,x,0) \equiv 0$.

$m=1$ のときは, (C_1), (C_2), (C_3) は第2節の (A_1), (A_2), (A_3) そのものであり, このときは (E) は Briot-Bouquet 型の偏微分方程式である. いま,

$$C(\lambda, x) = \lambda^m - \sum_{j<m} \frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0,x,0)\lambda^j$$

とおき, $C(\lambda,x)=0$ の解 $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ を「(E) の特性指数」と呼ぶ. 一般的には, これは $x=0$ の近傍での連続関数である.

正則解に関しては, 次の結果が成り立つ.

定理 3 ([3]) もしも $\lambda_i(0) \notin \boldsymbol{N}^*$ $(i=1,\dots,m)$ ならば, 方程式 (E) は原点の近傍での 正則解 $u(t,x)$ で $u(0,x)\equiv 0$ を満たすものをただ一つ持つ. (以下この正則解を $u_0(t,x)$ とかく.)

特異点をもつ解に関しては, 次の結果（定理４）が基本的である.

$$\mu = \#\{\, i\,; \mathrm{Re}\lambda_i(0) > 0\}$$

とおく. 条件 $\mu = 0$ は,「$\mathrm{Re}\lambda_i(0) \le 0\ (i = 1, \cdots, m)$」が成り立つことと同値である. $\mu > 0$ のときは, 適当に番号を付け替えることにより

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\lambda_i(0) > 0, & 1 \le i \le \mu \text{ のとき}, \\ \mathrm{Re}\lambda_i(0) \le 0, & \mu + 1 \le i \le m \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.1}$$

となっているとして差し支えない.

定理４ ([3]) (C_1), (C_2), (C_3), (3.1) を仮定する. $\mathcal{S}_+$ でもって, (E) のすべての $\tilde{\mathcal{O}}_+$-解の集合を表すものとする. 次が成り立つ.

(I) $\mu = 0$ のときは, $\mathcal{S}_+ = \{u_0\}$ となる. ここで, u_0 は (E) のただ一つの正則解である.

(II) $\mu > 0$ のときは,

1) $\lambda_i(0) \neq \lambda_j(0)\ (1 \le i \neq j \le \mu)$,
2) $C(1, 0) \neq 0$,
3) $i + j_1 + \cdots + j_\mu \ge 2$ を満たす任意の $(i, j_1, \cdots, j_\mu) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}^\mu$ に対して $C(i + j_1\lambda_1(0) + \cdots + j_\mu\lambda_\mu(0), 0) \neq 0$ が成り立つ

という付加条件のもとで次が成り立つ.

$$\mathcal{S}_+ = \Big\{ U(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu)\,;\ (\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu) \in \boldsymbol{C}\{x\}^\mu \Big\}.$$

ここで, $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu)$ は $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu) \in \boldsymbol{C}\{x\}^\mu$ に依存した (E) の $\tilde{\mathcal{O}}_+$-解であって, 次の様な展開式をもっている.

$$\begin{aligned} U(\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu) \;=\; & \sum_{i \ge 1} u_i(x) t^i + \\ & + \varphi_1(x) t^{\lambda_1(x)} + \cdots + \varphi_\mu(x) t^{\lambda_\mu(x)} \\ & + \sum_{\substack{i + 2m|j| \ge k + 2m \\ |j| \ge 1 \\ (i, |j|) \neq (0, 1)}} \phi_{i,j,k}(x) t^{i + j_1\lambda_1(x) + \cdots + j_\mu\lambda_\mu(x)} (\log t)^k. \end{aligned}$$

上の定理４の (I) は, 定理３と次の命題からすぐにでてくる.

命題１ もしも $\mathrm{Re}\,\lambda_i(0) \le 0\ (i = 1, \ldots, m)$ が成り立つならば, $\tilde{\mathcal{O}}_+$ の中で 方程式 (E) の解の一意性が成り立つ.

4. 解の一意性について

ここでは, 命題1の「解の一意性」を拡張することを考えてみたい. まず, 未だ証明に成功していない一つの予想について述べておく.

区間 $(0,T)$ で定義された実数値関数 $\mu(t)$ が次の条件$\mu_1)\sim\mu_4)$ を満たすとき「ウェイト関数」であるという.

$\mu_1)$ $\mu(t)\in C^0((0,T))$,

$\mu_2)$ $(0,T)$ の上で $\mu(t)>0$, かつ t に関して単調増加,

$\mu_3)$ $\displaystyle\int_0^T\frac{\mu(s)}{s}ds<\infty$,

$\mu_4)$ ある $c>0$ に対して $\mu(t+ct)=O(\mu(t))$ $(t\longrightarrow+0$ のとき).

$\mu_2)$ と $\mu_3)$ から, $\mu(t)\longrightarrow 0$ $(t\longrightarrow+0$ のとき) が成り立つ. 次の関数がその代表的な例である.

$$\mu(t)=t^a,\ \frac{1}{(-\log t)^b},\ \frac{1}{(-\log t)(\log(-\log t))^c}.$$

ただし $a>0$, $b>1$, $c>1$.

定義 4 $a>0$とする. 次の条件を満たす関数$u(t,x)$の全体を $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ で表す.

(条件) $u(t,x)$ は領域$\{(t,x)\in\mathcal{R}(\boldsymbol{C}\setminus\{0\})\times\boldsymbol{C}^n\,;\,0<|t|<\varepsilon,|\arg t|<\theta,|x|\le\delta\}$ (ただし, $\varepsilon>0,\theta>0,\delta>0$) での正則関数であって, $t\longrightarrow+0$ のとき次が成り立つ.

$$\max_{|x|\le\delta}|u(t,x)|=O(\mu(t)^a).$$

予想 もしも $\mathrm{Re}\,\lambda_i(0)\le 0$ $(i=1,\ldots,m)$ が成り立つならば, $\mathcal{S}_m(\mu(t))$ の中で 方程式 (E) の解の一意性が成り立つ.

$m=1$ のときは解決済み ([2]). $m\ge 2$ のときは未だ未解決である.
ここでは, 少し強い条件の下での結果を紹介しておく.

定理 5 ([6]) もしも 原点 $x=0$ の近傍で $\mathrm{Re}\,\lambda_i(x)\le 0$ $(i=1,\ldots,m)$ が成り立つならば, $\mathcal{S}_m(\mu(t))$ の中で 方程式 (E) の解の一意性が成り立つ.

これが割合良い結果になっていることは, 次の例を見れば理解されるであろう.

例 3 $(t,x)\in \boldsymbol{C}^2$ とし, 次の方程式を考える.

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u = 6u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{4.1}$$

特性指数は $\lambda_1=0$ と $\lambda_2=0$ である. このとき次が成り立つ.

1) $u(t,x)\equiv 0$ が $u(0,x)\equiv 0$ のもとでのただ一つの正則解である.

2) (4.1) はさらに次の様な解をもっている.

$$u(t,x)=\frac{x+\alpha}{(c-\log t)^2} \qquad (\alpha, c\in \boldsymbol{C}).$$

これより次が分かる. 「もしも $0<a<2$ ならば, $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中では (4.1) の解の一意性は必ずしも成り立たない」 実際, ウェイト関数として $\mu(t)=1/(-\log t)^c$ (ただし $1<c\le 2/a$) をとってくればよい.

4) 定理 5 より, 「$a=2$ ならば, $\mathcal{S}_2(\mu(t))$ の中で (4.1) の解の一意性が成り立つ」.

$0<a<m$ なる a に対して $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で (E) の解の一意性が成り立つかどうかについては, 次が成り立つ.

定理 6 ([5][6]) p を $0\le p\le m-1$ なる整数とし, 原点 $x=0$ の近傍で

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_i(x)\le 0, & i=1,\dots,p \text{ のとき}, \\ \operatorname{Re}\lambda_i(0)<0, & i=p+1,\dots,m \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つとする. このとき, もしも $a>p$ ならば $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で 方程式 (E) の解の一意性が成り立つ.

例 4 $(t,x)\in \boldsymbol{C}^2$ とし, 次の方程式を考える.

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u + \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)u = (2u+x+1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{4.2}$$

特性指数は $\lambda_1=0$ と $\lambda_2=-1$ である. このとき次が成り立つ.

1) $u(t,x)\equiv 0$ が $u(0,x)\equiv 0$ のもとでのただ一つの正則解である.

2) (4.2) はさらに次の様な解をもっている.

$$u(t,x)=\frac{x+1}{c-\log t} \qquad (c\in \boldsymbol{C}).$$

これより次が分かる. 「もしも $0 < a < 1$ ならば, $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中では (4.2) の解の一意性は必ずしも成り立たない」 実際, ウェイト関数として $\mu(t) = 1/(-\log t)^c$ (ただし $1 < c \leq 1/a$) をとってくればよい.

4) 定理6より 「$a > 1$ ならば, $\mathcal{S}_a(\mu(t))$ の中で (4.2) の解の一意性が成り立つ 」.

5) $a = 1$ のとき, 任意のウェイト関数 $\mu(t)$ に対して $\mathcal{S}_1(\mu(t))$ の中で (4.2) の解の一意性が成り立つかどうかは目下のところ未解決である.

5. 注意

(1)

(5.1) ある i に対して $\mathrm{Re}\lambda_i(0) > 0$ となる

という場合は, 定理4の (II) で見たように適当な条件のもとで 無数の $\tilde{\mathcal{O}}_+$-解 が出てくる. $\tilde{\mathcal{O}}_+$-解 $u(t,x)$ は, $t \longrightarrow +0$ のとき相当速いスピードで $u(t,x) \longrightarrow 0$ となるため, 「 (5.1) の場合に, 解の一意性を論じるのはあまり意味がない」といえそうである.

(2) (5.1) のときは, むしろ問題設定としては次の方が自然であろう.

問題 次の 「 」が成り立つのはいつか ?

「 $u \in \mathcal{S}_a(\mu(t))$ で (E) の解 $\Longrightarrow$ $u \in \tilde{\mathcal{O}}_+$ 」

参考文献

[1] R. Gérard and H. Tahara : *Nonlinear singular first order partial differential equations of Briot-Bouquet type,* Proc. Japan Acad., 66 (1990), 72-74.

[2] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.

[3] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.

[4] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations,* Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996

[5] H. Tahara: *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations,* J. Math. Soc. Japan, 48 (1996), 729-744.

[6] H. Tahara: *On the uniqueness theorem for nonlinear singular partial differential equations,* submitted.